ECO3022 : Macroéconomie III

Équilibre macroéconomique

Steve Ambler et Alain Guay *

Département des sciences économiques

École des sciences de la gestion

Université du Québec à Montréal

Automne 2012

*Ces notes sont en cours de développement. Nous avons besoin de vos commentaires et de vos suggestions pour les améliorer. Vous pouvez nous faire part de vos commentaires en personne ou en envoyant un message à guay.alain@uqam.ca.

Table des matières

1 Introduction

Objectifs du cours :

– Analyser l'interaction entre l'offre agrégée et la demande agrégée.

– Comprendre comment le modèle peut expliquer la persistance des fluctuations, et comment analyser la vitesse de convergence à l'équilibre de long terme.
– Étudier comment analyser les sentiers de réponse de variables macroéconomiques à des chocs donnés (« impulse response functions »).
– Étudier comment faire des simulations stochastiques d'un modèle macréconomique complet.
– Étudier comment on peut faire une évaluation d'un modèle macroéconomique en comparant ses prédictions quant aux fluctuations (variabilités, corrélations, autocorrélations, etc.) avec les données.

2 Le modèle de demande agrégée et d'offre agrégées

$$y_t - \bar{y} = \alpha_1 (g_t - \bar{g}) - \alpha_2 (r_t - \bar{r}) + v_t, \tag{1}$$

$$r_t \equiv i_t - \pi^e_{t+1}, \tag{2}$$

$$i_t = \bar{r} + \pi^e_{t+1} + h (\pi_t - \pi^*) + b (y_t - \bar{y}), \tag{3}$$

$$\pi_t = \pi^e_t + \gamma (y_t - \bar{y}) + s_t, \tag{4}$$

$$\pi^e_t = \pi_{t-1}. \tag{5}$$

La dernière équation reflète une hypothèse concernant la formation des attentes de l'inflation. On suppose que les attentes son **statiques**. L'inflation anticipée de la période t est égale à l'inflation réalisée de la période précédente.

Il s'agit aussi d'un système qui, écrit de la bonne façon, a le même nombre d'inconnus que d'équations, une condition nécessaire afin de pouvoir trouver une solution unique au modèle macroéconomique que nous venons de définir.

Réécrivons les équations comme

$$(y_t - \bar{y}) = \alpha_1 (g_t - \bar{g}) - \alpha_2 (r_t - \bar{r}) + v_t,$$

$$(r_t - \bar{r}) = \left(i_t - \pi^e_{t+1} - \bar{r}\right),$$

$$\left(i_t - \pi^e_{t+1} - \bar{r}\right) = h (\pi_t - \pi^*) + b (y_t - \bar{y}),$$

$$(\pi_t - \pi^*) = (\pi^e_t - \pi^*) + \gamma (y_t - \bar{y}) + s_t,$$

$$(\pi^e_t - \pi^*) = (\pi_{t-1} - \pi^*).$$

Écrit de cette façon, il est clair qu'il y a 5 inconnus : $(y_t - \bar{y})$, $(r_t - \bar{r})$, $(\pi_t - \pi^*)$, $\left(i_t - \pi^e_{t+1} - \bar{r}\right)$, et $(\pi^e_t - \pi^*)$. Il est clair aussi que toutes les variables sont exprimées en déviations par rapport à leurs niveaux tendanciels. Les variables $(g_t - \bar{g})$, v_t, et s_t sont considérées comme des variables exogènes.

Les équations (1), (2), et (3) donne la courbe de demande agrégée

$$y_t - \bar{y} = \alpha (\pi^* - \pi_t) + z_t, \tag{6}$$

qui peut être réécrite

$$\pi_t = \pi^* - \left(\frac{1}{\alpha}\right)(y_t - \bar{y} - z_t). \tag{7}$$

De (4) et (5) nous pouvons écrire la courbe d'offre agrégée de court terme comme

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \gamma(y_t - \bar{y}) + s_t. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) consituent un système de deux équations. Les inconnus sont la déviation (proportionnelle) de l'output par rapport à sa valeur de long terme $(y_t - \bar{y})$, et l'inflation π_t. Notez que dans l'équation (8) l'inflation est datée π_t et π_{t-1}. Il s'agit donc d'un système d'équations **dynamiques**. Pour cette raison, toutes les variables portent explicitement des indices du temps.

2.1 Équilibre de court terme

Figure 18.3

Il y a une courbe verticale au point où $y_t = \bar{y}$. C'est le point où

$$\pi_t = \pi_{t-1} = \pi_t^e.$$

Les attentes inflationnistes sont réalisées. Le taux d'inflation réalisée est stable. Si $s_t = 0$, l'équation (8) nous donne

$$\pi_t = \pi_t + \gamma(y_t - \bar{y})$$

$$\Rightarrow y_t = \bar{y}.$$

À long terme, lorsque l'inflation réalisée est égale à l'inflation anticipée et en l'absence de chocs d'offre ($s_t = 0$), il faut que $y_t = \bar{y}$. Nous appelons cette courbe verticale la courbe d'offre agrégée de long terme.

L'intersection entre les courbes OA et DA peut se trouver au point où $y_t = \bar{y}$. Si c'est le cas, l'équilibre macroéconomique est compatible avec l'équilibre de long terme dans l'économie.

Soyez certains de bien comprendre ce graphique, surtout ce qui influence la position de courbes OA et DA. Nous mesurons y_t sur l'axe horizontal. Lorsque $y_t = \bar{y}$ et $z_t = 0$, nous avons (utilisant l'équation de la courbe DA)

$$\pi_t = \pi^* - \frac{1}{\alpha}\left(\bar{y} - \bar{y} - 0\right) = \pi^*.$$

Donc, la hauteur de la courbe DA en l'absence de chocs et au point où $y_t = \bar{y}$ est π_t, le taux d'inflation courant. Lorsque $y_t = \bar{y}$ et $s_t = 0$, nous avons (utilisant l'équation de la courbe OA)

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \gamma\left(\bar{y} - \bar{y}\right) + 0 = \pi_{t-1}.$$

Donc, la hauteur de la courbe OA en l'absence de chocs et au point où $y_t = \bar{y}$ est π_{t-1}. Avec l'hypothèse d'attentes statiques, nous savons aussi que

$$\pi_{t-1} = \pi_t^e.$$

Cette dernière égalité va être très importante et va nous permettre de faire une analyse graphique de l'ajustement dynamique vers l'équilibre de long terme.
Si l'équilibre macroéconomique a la propriété que $y_t \neq \bar{y}$, il y aura un processus d'ajustement dynamique vers l'équilibre de long terme, que nous allons décrire dans la section suivante.

2.2 Ajustement vers l'équilibre de long terme

Figure 18.4
L'équation de la courbe d'offre agrégée (4) est l'équation d'une droite. On peut évaluer π_t étant donnée n'importe quelle valeur de y_t. En particulier, au point où $y_t = \bar{y}$, nous avons

$$\pi_t = \pi_t^e + \gamma \left(\bar{y} - \bar{y} \right) + s_t.$$

Si en plus $s_t = 0$, nous avons

$$\pi_t^e = \left(\pi_t | \left(y_t = \bar{y} \right) \right)$$

à ce point. La barre verticale ici se lit « étant donné que ». Autrement dit, on peut lire l'inflation anticipée comme la valeur de π_t sur la courbe d'offre agrégée de court terme où elle coupe la courbe d'offre agrégée de long terme.
À cause de notre hypothèse d'attentes statiques, nous savons aussi que

$$\pi_t = \pi_{t+1}^e.$$

Donc, la courbe d'offre agrégée de court terme en $(t+1)$ doit couper la courbe d'offre agrégée de long terme à la hauteur de π_t. La courbe d'offre agrégée de court terme se déplace vers le bas entre t et $(t+1)$.

Figure 18.5

Figure 18.6

La courbe OA de court terme continue à se déplacer et, à long terme, se déplace au point d'intersection entre la courbe DA et la courbe OA de long terme.

2.3 Calibration du modèle et vitesse de convergence

Définissons

$$\widehat{y}_t \equiv y_t - \bar{y}$$

et

$$\widehat{\pi}_t \equiv \pi_t - \bar{\pi}^*$$

Si $s_t = z_t = 0$, nous pouvons écrire (7) et (8) comme

$$\widehat{\pi}_{t+1} = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\widehat{y}_{t+1}, \quad \alpha \equiv \frac{\alpha_2 h}{1+\alpha_2 b} \tag{9}$$

et

$$\widehat{\pi}_{t+1} = \widehat{\pi}_t + \gamma \widehat{y}_{t+1}. \tag{10}$$

À partir de ces deux équations, nous obtenons

$$-\frac{1}{\alpha}\widehat{y}_{t+1} = -\frac{1}{\alpha}\widehat{y}_t + \gamma \widehat{y}_{t+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\widehat{y}_t = \left(\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\widehat{y}_{t+1}$$

$$\Rightarrow \widehat{y}_t = (\alpha\gamma + 1)\,\widehat{y}_{t+1}$$

$$\Rightarrow \widehat{y}_{t+1} = \frac{1}{1+\alpha\gamma}\widehat{y}_t \equiv \beta\widehat{y}_t, \tag{11}$$

et

$$-\alpha\widehat{\pi}_{t+1} = -\alpha\frac{1}{1+\alpha\gamma}\widehat{\pi}_t$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_{t+1} = \beta\widehat{\pi}_t, \tag{12}$$

où

$$\beta \equiv \frac{1}{1+\alpha\gamma}.$$

Ces équations ont comme solution

$$\widehat{y}_t = \widehat{y}_0\beta^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

et

$$\widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_0\beta^t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Pour un point de départ arbitraire en dehors de l'équilibre de long terme, ces deux équations décrivent comment l'économie revient vers son équilibre de long terme. Pour l'instant, on ne pose pas la question **pourquoi** l'économie n'est pas à son équilibre de long terme. On reviendra à cette question plus tard lorsqu'on examinera graphiquement la réponse de l'économie à des chocs de demande et d'offre temporaires.

Donc, la vitesse de convergence dépend de la valeur numérique de β. Strictement parlant, l'économie ne converge à l'équilibre de long terme que lorsque $t \to \infty$, et ceci indépendamment de la valeur numérique de β. On peut calculer combien de temps est requis pour que la moitié de l'ajustement se fasse. Nous avons

$$\widehat{y}_t = \frac{1}{2}\widehat{y}_0$$

$$\Leftrightarrow \beta^{t_h} = \frac{1}{2}$$

où t_h est l'inconnu que nous cherchons,

$$\Leftrightarrow t_h \ln(\beta) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t_h = -\frac{\ln(2)}{\ln(\beta)} = -\frac{0.693}{\ln(\beta)}. \tag{15}$$

Donc cette durée ou « demi-vie » dépend des valeurs de α et de γ.

Selon l'équation (12) dans le chapitre 16, le paramètre α_2 qui rentre dans la définition de α dans l'équation (9) peut s'écrire

$$\alpha_2 \equiv \frac{-D_r}{\bar{Y}(1-D_Y)} = \left(\frac{1-\tau}{1-D_Y}\right)\eta, \tag{16}$$

où

$$\eta \equiv \frac{-D_r}{\bar{Y}(1-\tau)}.$$

Il faut calibrer ou étalonner les paramètres. Nous procédons comme suit. Nous avons à l'esprit une longueur d'une période d'un trimestre.

– Nous utilisons une valeur de 0.05 pour γ. Voir la note de bas de page 6 à la page 524. La valeur est basée sur une estimation économétrique avec données américaines.
– Nous utilisons les valeurs de b et h préconisées par John Taylor, soit 0.5 et 0.5.
– Le paramètre τ est le taux de taxation net (taxes moins transferts) sur le secteur privé. Une valeur raisonnable serait 0.2.
– Le paramètre D_Y est la propension marginale à consommer. Une valeur raisonnable serait 0.8.
– Le paramètre η donne l'impact d'une augmentation de un point de pourcentage du taux d'intérêt réel sur le surplus d'épargne du secteur privé (épargne moins investissement), par rapport au revenu disponible privé. Un estimé économétrique pour le Danemark a donné une valeur de 3.6. (Voir la référence à la page 565 du manuel.)
– Ces valeurs impliquent une valeur de α_2 de

$$\frac{1-0.2}{1-0.8}3.6 = \frac{0.8}{0.2}3.6 = 14.4.$$

Avec cette valeur de α_2 et les valeurs de h et b, nous obtenons

$$\alpha = \frac{\alpha_2 h}{1+\alpha_2 b} = 0.878$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{1+\alpha\gamma} = 0.958.$$

Il est facile de constater que pour une gamme assez large de valeurs pour α, la valeur faible de γ (0.05) va donner une valeur de β qui est très près de 1.

Nous utilisons pour résumer :

paramètre	valeur
γ	0.05
η	3.6
h	0.5
b	0.5
τ	0.2
D_Y	0.8
α_2	14.4
β	0.958

Il s'agit d'une valeur relativement élevée de β, ce qui implique un degré élevé de persistance. Insérant cette valeur dans (15), nous obtenons

$$t_h = -\frac{0.693}{\ln(0.958)} \approx 16.$$

Donc, la moitié de l'ajustement vers l'équilibre de long terme se fait à l'intérieur d'une période de 16 trimestres ou 4 ans. La durée moyenne des cycles dans les économies industrialisée d'après-guerre n'est pas beaucoup plus longue.

3 Analyse de l'impact de chocs

3.1 Analyse graphique

Figure 18.7

Figure 18.8

3.2 Fonctions de réponse

Nous voulons maintenant calculer **algébriquement** ou numériquement la réponse de l'économie à des chocs temporaires. Nous allons résoudre encore une fois le modèle, cette fois-ci sans supprimer les chocs.

Nous pouvons écrire la courbe DA comme

$$\widehat{\pi}_t = \left(\frac{1}{\alpha}\right)(z_t - \widehat{y}_t)\,, \tag{17}$$

et OA comme

$$\widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\widehat{y}_t + s_t. \tag{18}$$

À partir de (17) nous avons

$$\widehat{\pi}_{t-1} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)(z_{t-1} - \widehat{y}_{t-1})\,.$$

Nous obtenons

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)(z_t - \widehat{y}_t) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)(z_{t-1} - \widehat{y}_{t-1}) + \gamma\widehat{y}_t + s_t$$

$$\Rightarrow z_t - \widehat{y}_t = z_{t-1} - \widehat{y}_{t-1} + \alpha\gamma\widehat{y}_t + \alpha s_t$$

$$\Rightarrow (1+\alpha\gamma)\,\widehat{y}_t = \widehat{y}_{t-1} + (z_t - z_{t-1}) - \alpha s_t$$

$$\Rightarrow \widehat{y}_t = \beta\widehat{y}_{t-1} + \beta\,(z_t - z_{t-1}) - \alpha\beta s_t, \tag{19}$$

Pour l'inflation, on insert

$$\widehat{y}_t = z_t - \alpha\widehat{\pi}_t$$

(qui provient direcetement de (17)) dans l'équation de l'offre aggrégée (18), ce qui donne

$$\widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\,(z_t - \alpha\widehat{\pi}_t) + s_t,$$

et on simplifie :

$$(1+\gamma\alpha)\,\widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma z_t + s_t$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_t = \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \beta\gamma z_t + \beta s_t. \tag{20}$$

Bien sûr, il est aussi possible d'insérer l'expression pour $\widehat{y}_t$ dans la solution finale qu'on vient de trouver pour l'écart du produit. Nous avons

$$z_t - \alpha\widehat{\pi}_t = \beta\,(z_{t-1} - \alpha\widehat{\pi}_{t-1}) + \beta\,(z_t - z_{t-1}) - \alpha\beta s_t.$$

Divisant des deux côtés de l'équation par $-\alpha$, nous obtenons

$$\widehat{\pi}_t - \frac{1}{\alpha}z_t = \beta\widehat{\pi}_{t-1} - \frac{\beta}{\alpha}z_{t-1} - \frac{\beta}{\alpha}z_t + \frac{\beta}{\alpha}z_{t-1} + \beta s_T$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_t = \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{1-\beta}{\alpha} z_t + \beta s_t$$

$$= \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{1+\gamma\alpha-1}{1+\gamma\alpha}\frac{1}{\alpha} z_t + \beta s_t$$

$$= \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{\gamma}{1+\gamma\alpha} z_t + \beta s_t$$

$$= \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \beta\gamma z_t + \beta s_t,$$

ce qui est identique à (20). On arrive a la même solution par deux voies différentes. Ceci est tout à fait normal. Puisque l'équilibre macroéconomique implique qu'offre agrégée égale demande agrégée, nous pouvons utiliser soit l'offre, soit la solution finale pour $\widehat{y}_t$ avec l'équation pour la demande agrégée afin de trouver une solution pour $\widehat{\pi}_t$.

Ceci nous permet d'analyser la réponse de $\widehat{y}_t$ et de $\widehat{\pi}_t$ à des chocs de demande temporaires ou des chocs d'offre temporaires. Pour le faire numériquement, nous imposons des conditions initiales sur l'équilibre macroéconomique.

Typiquement, nous supposons qu'au départ Í'économie est à son équilibre de long terme. Si nous appelons le point de départ la période 0, nous avons

$$\widehat{y}_0 = \widehat{\pi}_0 = s_0 = z_0 = 0.$$

Maintenant, pour analyser l'impact d'un choc de demande temporaire qui est positif, nous imposons

$$z_1 = \bar{z} > 0,$$

$$z_i = 0, \quad \forall i > 1,$$

et

$$s_i = 0, \quad \forall i \geq 0.$$

Pour le sentier de réponse de l'output, nous avons

$$\widehat{y}_1 = \beta \widehat{y}_0 + \beta \left(z_1 - z_0 \right) - \alpha \beta s_1$$

$$= \beta \bar{z}.$$

Nous avons aussi

$$\widehat{y}_2 = \beta \widehat{y}_1 + \beta \left(z_2 - z_1 \right) - \alpha \beta s_2$$

$$= \beta^2 \bar{z} - \beta \bar{z} = -\beta \left(1 - \beta \right) \bar{z} < 0.$$

Ensuite, nous avons

$$\widehat{y}_3 = \beta \widehat{y}_2 + \beta \left(z_3 - z_2 \right) - \alpha \beta s_3$$

$$= \beta \widehat{y}_2 = -\beta^2 \left(1 - \beta \right) \bar{z}.$$

Ensuite, nous avons

$$\widehat{y}_4 = -\beta^3 \left(1 - \beta \right) \bar{z},$$

et de manière générale

$$\widehat{y}_t = -\beta^{(t-1)} \left(1 - \beta \right) \bar{z}.$$

L'analyse algébrique est cohérente avec l'analyse graphique. Après l'impact initial du choc de demande positif qui fait augmenter l'écart du produit, l'écart du produit devient négatif la période après et revient graduellement vers zéro (son équilibre de long terme) par en bas.

L'analyse de l'impact d'un choc d'offre temporaire sur l'écart du produit, et d'un choc temporaire (d'offre ou de demande) sur l'inflation est semblable.

3.3 Chocs permanents

L'analyse du manuel sur l'impact de chocs permanents est fausse. Il y a une annexe à ce chapitre de notes qui explique pourquoi. Je conseille même de ne pas lire la section du chapitre dans le manuel qui discute de chocs permanents, à moins de vouloir saisir en détail pourquoi l'analyse du livre n'est pas bonne.

4 Version stochastique du modèle

Chocs et propagation – illustré par l'équation simple

$$a_t = 0.9a_{t-1} + e_t, \tag{26}$$

avec e_t un choc imprévisible généré par une loi normale avec moyenne nulle et variance constante.

Voir la Figure 18.10 du manuel.

Des simulations de cette série peuvent engendrer des fluctuations qui ressemblent qualitativement aux fluctuations de l'écart du produit ou d'autres séries macroéconomiques.

Dans le cas du modèle OA-DA que nous avons développé, nous allons faire des hypoèthèses spécifiques concernant l'évolutions des chocs (de demande et d'offre) qui voici.

Supposons le processus suivant pour les chocs de demande :

$$z_{t+1} = \delta z_t + x_{t+1}, \quad 0 \leq \delta < 1, \quad x_t \sim N\left(0\ ,\ \sigma_x^2\right). \tag{27}$$

Figure 18.11

Supposons le processus suivant pour les chocs de d'offre :

$$s_{t+1} = \omega s_t + c_{t+1}, \quad 0 \leq \omega < 1, \quad c_t \sim N\left(0\ ,\ \sigma_c^2\right). \tag{28}$$

4.1 Prédictions du modèle et faits stylisés du cycle

Pour simuler le modèle il faut faire les étapes suivantes. Nous considérons pour commencer le cas où il n'y a que des chocs de demande.

1. Insérer (27) dans le modèle donné par (19) et (20).
2. Fixer les conditions initiales $\widehat{y}_0 = \widehat{\pi}_0 = z_0 = 0$ et fixer $s_t = 0, \quad \forall t$.
3. Générer sur ordinateur un échantillon de 100 observations venant d'une distribution normale centrée réduite. Le choix de 100 périodes est arbitraire. Souvent, nous voulons générer un échantillon dont la longueur ressemble à ce que nous avons dans les données. Cela nous donne une série de chocs avec moyenne nulle et variance unitaire.

4. Utiliser ces valeurs, multipliant par $\sqrt{\sigma_x^2}$ pour corriger la variance, comme valeurs pour x_t. Simuler (19) et (20) sur 100 périodes. Conserver les valeurs de $\widehat{y}_t$ et de $\widehat{\pi}_t$ en mémoire.

5. Utiliser les valeurs réalisées de $\widehat{y}_t$ et de $\widehat{\pi}_t$ afin de calculer leurs écarts types, leurs corrélations croisées et leurs autocorrélations.

Les résultats d'un tel exercice sont présentés dans la première rangée du Tableau 18.1. Les détails concernant les valeurs de δ et de σ_x^2 sont dans le manuel. Dans la deuxième rangée du Tableau il y a les résultats d'une simulation avec chocs d'offre seulement. Les détails concernant les valeurs de ω et de σ_c^2 sont dans le manuel.

Tableau 18.1

Modèle stochastique OA/DA et faits stylisés du cycle

	Écart type		Corr.	Autocorrélation							
	Y	π	Y/π	Y				π			
				$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$	$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$
Modèle sans chocs d'offre	1.64	0.82	0.08	0.84	0.71	0.53	0.42	0.99	0.96	0.91	0.86
Modèle sans chocs de demande	1.65	2.22	-1.00	0.91	0.83	0.75	0.69	0.91	0.83	0.75	0.69
Modèle avec les deux chocs	1.63	0.27	0.36	0.86	0.73	0.57	0.45	0.57	0.50	0.42	0.48
Données	1.64	0.21	0.31	0.84	0.60	0.34	0.11	0.48	0.25	0.29	0.01

Entre autres, nous constatons que le taux d'inflation tel que prédit par le modèle est bien trop persistent par rapport aux données.

Ce constat nous amène à modifier les hypothèses de base du modèle. Nous remplaçons l'hypothèse d'attentes statiques par une hypothèse d'attentes adaptatives. Notez qu'avec cette hypothèse concernant la formation des attentes, il devient beaucoup plus difficile de résoudre le modèle graphiquement, puisque nous n'avons pas une méthodologie précise pour trouver l'emplacement ou l'évolution de la courbe d'offre agrégée de court terme. Par contre, nous pouvons faire des simulations numériques aussi facilement que dans le cas des attentes statiques.

4.2 Le modèle avec attentes adaptatives

Figure 18.2

Notre hypothèse concernant la formation des attentes devient

$$\pi_t^e - \pi_{t-1}^e = (1 - \phi) \left(\pi_{t-1} - \pi_{t-1}^e \right), \tag{29}$$

où $0 < \phi < 1$. Notez que dans le cas où $\phi = 0$ nous retrouvons le cas d'attentes statiques. Nous retrouvons immédiatement

$$\pi_t^e = \phi \pi_{t-1}^e + (1 - \phi) \pi_{t-1}. \tag{30}$$

L'inflation anticipée de la période t est une moyenne pondérée de l'inflation réalisée de la période $t-1$ et de l'inflation anticipée de la période $t-1$. Nous avons aussi

$$\pi^e_{t-1} = \phi\pi^e_{t-2} + (1-\phi)\,\pi_{t-2}, \tag{31}$$

$$\pi^e_{t-2} = \phi\pi^e_{t-3} + (1-\phi)\,\pi_{t-3}, \tag{32}$$

$$\vdots$$

Utilisant des substitutions successives nous obtenons

$$\pi^e_t = \sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(n-1)}\,(1-\phi)\,\pi_{t-n}. \tag{33}$$

L'inflation anticipée devient une moyenne pondérée des taux d'inflation réalisés des périodes précédentes.

Notre modèle devient

$$\pi_t = \pi^e_t + \gamma\,(y_t - \bar{y}) + s_t, \tag{34}$$

$$y_t - \bar{y} = \alpha\,(\pi^* - \pi_t) + z_t, \tag{35}$$

et

$$\pi^e_t = \phi\pi^e_{t-1} + (1-\phi)\,\pi_{t-1}. \tag{36}$$

Calculant le premier retard de la courbe OA nous obtenons après avoir réarrangé les termes,

$$\pi^e_{t-1} = \pi_{t-1} - \gamma\,(y_{t-1} - \bar{y}) - s_{t-1}. \tag{37}$$

Insérant cette expression pour π^e_{t-1} dans (36) nous obtenons

$$\pi^e_t = \phi \left(\pi_{t-1} - \gamma \left(y_{t-1} - \bar{y}\right) - s_{t-1}\right) + \left(1 - \phi\right) \pi_{t-1},$$

ce qui donne après simplification

$$\pi^e_t = \pi_{t-1} - \phi\gamma \left(y_{t-1} - \bar{y}\right) - \phi s_{t-1}. \tag{38}$$

Nous avons réussi à exprimer l'inflation anticipée en termes de valeurs **réalisées** de l'inflation, de l'écart du produit et de chocs. Substituant (38) dans (34) et utilisant les définitions

$$\widehat{y}_t \equiv y_t - \bar{y}$$

et

$$\widehat{\pi}_t \equiv \pi_t - \pi^*,$$

nous obtenons

$$\pi_t = \pi_{t-1} - \phi\gamma \left(y_{t-1} - \bar{y}\right) - \phi s_{t-1} + \gamma \left(y_t - \bar{y}\right) + s_t$$

$$\Rightarrow \left(\pi_t - \pi^*\right) = \left(\pi_{t-1} - \pi^*\right) + \gamma \left(y_t - \bar{y}\right) - \phi\gamma \left(y_{t-1} - \bar{y}\right) + s_t - \phi s_{t-1}$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\widehat{y}_t - \phi\gamma\widehat{y}_{t-1} + s_t - \phi s_{t-1}.$$

Directement de (35), nous obtenons

$$\widehat{y}_t = z_t - \alpha \widehat{\pi}_t. \tag{39}$$

Nous avons aussi

$$\widehat{\pi}_t = \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma \widehat{y}_t - \phi \gamma \widehat{y}_{t-1} + s_t - \phi s_{t-1}. \tag{40}$$

Il s'agit d'un système de deux équations en deux inconnus. Comme dans la version du modèle avec attentes statiques, les chocs sont des variables exogènes. À cause de la relation **statique** qui relie l'inflation et l'output donnée par (39), nous pouvons facilement éliminer $\widehat{\pi}_t$ et $\widehat{\pi}_{t-1}$ de (40) pour obtenir

$$\frac{1}{\alpha} z_t - \frac{1}{\alpha} \widehat{y}_t = \frac{1}{\alpha} z_{t-1} - \frac{1}{\alpha} \widehat{y}_{t-1} + \gamma \widehat{y}_t - \phi \gamma \widehat{y}_{t-1} + s_t - \phi s_{t-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} + \gamma \right) \widehat{y}_t = \left(\frac{1}{\alpha} + \phi \gamma \right) \widehat{y}_{t-1} + \frac{1}{\alpha} z_t - \frac{1}{\alpha} z_{t-1} - s_t + \phi s_{t-1}$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha \gamma) \widehat{y}_t = (1 + \alpha \gamma \phi) \widehat{y}_{t-1} + z_t - z_{t-1} - \alpha s_t + \alpha \phi s_{t-1}$$

$$\Rightarrow \widehat{y}_t = a \widehat{y}_{t-1} + \beta (z_t - z_{t-1}) - \alpha \beta s_t + \alpha \beta \phi s_{t-1}, \tag{41}$$

et

$$\widehat{\pi}_t = a \widehat{\pi}_{t-1} + \gamma \beta z_t - \gamma \beta \phi z_{t-1} + \beta s_t - \beta \phi s_{t-1}, \tag{42}$$

avec

$$a \equiv \frac{1 + \alpha \gamma \phi}{1 + \alpha \gamma} < 1, \qquad \beta \equiv \frac{1}{1 + \alpha \gamma} < 1. \tag{43}$$

Je viens de montrer en détail les dérivations menant à (41). L'algèbre qui donne l'équation (42) est dans une Annexe à la fin de ce chapitre de notes.

Nous pouvons simuler le modèle exactement de la même manière que le modèle avec attentes statiques. En fait, nous pouvons faire plus que ça. Nous pouvons simuler le modèle un grand nombre de fois, toujours avec les mêmes valeurs de paramètres, mais avec des réalisations différentes des chocs. Ceci permet de tenir compte de l'incertitude des résultats qui provient de l'incertitude concernant les chocs. Nous avons de cette façon une meilleure idée de la distance **statistique** entre les prédiction du modèle et la réalité.[1] Les chiffres entre parenthèses dans la Figure 18.13 représente les écarts types des statistiques calculées à travers les répétitions différentes des simulations.

Tableau 18.2

Modèle stochastique OA/DA et faits stylisés du cycle

	Écart type		Corr.	Autocorrélation							
	Y	π	Y/π	Y				π			
				$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$	$t-1$	$t-2$	$t-3$	$t-4$
Modèle	1.41	0.26	0.09	0.70	0.49	0.34	0.29	0.33	0.18	0.14	0.13
	(0.18)	(0.03)	(0.14)	(0.07)	(0.11)	(0.14)	(0.15)	(0.13)	(0.15)	(0.15)	(0.15)
Données	1.66	0.29	0.10	0.86	0.65	0.41	0.18	0.50	0.29	0.24	0.17

Les prédictions du modèle sont basées sur 1000 simulations avec des échantillons de 100 périodes. Les chiffres dans la première rangée sont les

[1] Les tests statistiques formels de l'adéquation de modèles de ce type fait partie normalement de cours plus avancés (maîtrise et doctorat) en théorie macroéconomique.

moyennes à travers les 1000 simulations. Les chiffres entre parenthèses sont les écarts types à travers les 1000 simulations. Les données sont des observations trimestrielles de l'économie américaine allant de 1955 : 1 à 2001 : 4. Les données ont été stationnarisées utilisant le filtre Hodrick-Prescott avec un multiplicateur λ égal à 1600. Les valeurs des paramètres sont comme dans la section (2.3) avec $\phi = 0.92$, $\sigma_s = 1$, $\delta = 0.75$, $\sigma_c = 0.25$ et $\omega = 0.25$.
Notez que les écarts types permettraient en principe de faire des tests d'hypothèse formels de l'hypothèse nulle qu'une prédiction donnée du modèle est compatible avec les données. Nous pourrions même faire un test de l'hypothèse jointe que **toutes** les prédictions du modèle sont compatibles avec les données.

4.3 Pourquoi est-ce que l'inflation est moins persistante avec attentes adaptatives ?

En comparant les résultats du Tableau 18.1 avec ceux du Tableau 18.2, on constate que l'inflation est **moins** persistante dans le modèle avec attentes adaptatives que dans le modèle avec attentes rationnelles. Ceci peut sembler paradoxal, puisque si β dans le modèle avec attentes statiques mesure la vitesse dans le modèle avec attentes statiques, tandis que c'est a qui mesure la vitesse de convergence dans le modèle avec attentes adaptatives, et nous savons que

$$a = \frac{1 + \phi\alpha\gamma}{1 + \alpha\gamma} \geq \frac{1}{1 + \alpha\gamma} = \beta.$$

En principe, si on commence avec un écart donné par rapport à l'équilibre de long terme, l'inflation revient vers son équilibre de long terme plus lentement dans le modèle avec attentes adaptatives.

Nous pouvons déceler les raisons en comparant la solution pour l'inflation dans le modèle avec attentes adaptatives à celle dans le modèle avec attentes statiques. L'équation (42) est

$$\widehat{\pi}_t = a\widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\beta z_t - \gamma\beta\phi z_{t-1} + \beta s_t - \beta\phi s_{t-1}.$$

La solution dans le modèle avec attentes statiques est un cas spécial de cette équation, avec $\phi = 0$:

$$\widehat{\pi}_t = \beta\widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\beta z_t + \beta s_t.$$

Dans ce cas (et seulement dans ce cas) $\beta = a$.

On constate par contre que dans le modèle avec attentes adaptatives, la présence de chocs d'offre et de demande retardés fait en sorte que l'impact d'un choc temporaire est partiellement déjoué la période suivante. Nous avons

$$\frac{\partial\widehat{\pi}_t}{\partial s_t} = \beta$$

tandis que

$$\frac{\partial\widehat{\pi}_{t+1}}{\partial s_t} = -\phi\beta.$$

Donc, une bonne partie du retour vers l'équiibre de long terme se fait (dans le modèle avec attentes adaptatives) la période qui suit immédiatement après l'impact du choc. Par la suite, le retour vers l'équilibre est plus lent à cause du coefficient a qui est plus élevé que β.

Nous pouvons voir plus clairement ce qui arrive en transformant les équations d'attentes statiques et d'attentes adaptatives de la manière suivante. Dans le cas des attentes statiques, nous avons

$$\pi_{t+1}^e = \pi_t$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_{t+1}^e = \widehat{\pi}_t.$$

Dans le cas des attentes adaptatives, nous avons

$$\pi_{t+1}^e = \phi \pi_t^e + (1 - \phi) \pi_t$$

$$\Rightarrow \widehat{\pi}_{t+1}^e = \phi \widehat{\pi}_t^e + (1 - \phi) \widehat{\pi}_t.$$

Dans le cas d'une économie qui commence en période t à son équilibre de long terme, $\widehat{\pi}_t^e = 0$. Face à un choc d'offre négatif temporaire ($s_t > 0$), il est clair que les attentes inflationnistes augmentent moins dans le cas des attentes adaptatives que dans le cas des attentes statiques. Dans le premier cas, on a

$$\frac{\partial \widehat{\pi}_{t+1}^e}{\partial s_t} = \frac{\partial \widehat{\pi}_{t+1}^e}{\partial \widehat{\pi}_t} \frac{\partial \widehat{\pi}_t}{\partial s_t} = \beta.$$

Dans le deuxième cas, on a

$$\frac{\partial \widehat{\pi}^e_{t+1}}{\partial s_t} = \frac{\partial \widehat{\pi}^e_{t+1}}{\partial \widehat{\pi}_t} \frac{\partial \widehat{\pi}_t}{\partial s_t} = (1 - \phi)\beta.$$

Pour cette raison, suite à un choc d'offre négatif temporaire, la courbe d'offre agrégée se situe plus près de l'équilibre de long terme dans le cas d'attentes adaptatives que dans le cas d'attentes statiques. Le cas d'un choc d'offre négatif temporaire est symétrique, et le cas d'un choc de demande est semblable.
La morale de l'histoire : les paramètres β et a sont **reliés** à la vitesse de convergence vers l'équilibre de long terme, mais cette vitesse peut dépendre aussi d'autres facteurs comme la présence de chocs retardés qui déjouent l'impact de chocs une période après leur impact initial sur l'économie.

5 Conclusion

Notre analyse de l'équilibre macroéconomique nous permet de passer à une analyse plus approfondie de la politique de stabilisation. Jusqu'ici, nous avons tout simplement supposer une règle de comportement pour la banque centrale (la Règle de Taylor) avec des coefficients arbitraires h et b. Nous allons nous pencher dans le chapitre suivant sur les facteurs pouvant déterminer le choix optimal de ces coefficients.

Annexe A : Note sur les chocs permanents

Plus j'y pense, plus je pense que la section de ce chapitre sur les chocs permanents n'est pas cohérente. L'idée que l'effet à long terme d'un choc permanent pourrait dépendre du paramètre γ, qui est relié à la pente de la courbe de Phillips de court terme (et qui est donc fondamentalement une relation de court terme), est absurde.

Par définition, le choc d'offre s_t est une fonction des écarts entre m^p et $\bar{m}^p$, m^w et $\bar{m}^w$, et B et $\bar{B}$. Si $\bar{m}^p$, $\bar{m}^w$ ou $\bar{B}$ changent, les déviations de m^p, de m^w et de B par construction doivent être temporaires. La seule valeur possible à long terme pour s est zéro.

Je crois que pour analyser l'impact d'un choc permanent sur l'output il faut remonter au chapitre 17. Là, nous avons appris que (c'est l'équation (32) dans le chapitre 17) l'emploi à long terme doit être égal à

$$\bar{L} = n\left(\frac{\bar{B}(1-\alpha)}{\bar{m}^w\bar{m}^p c\bar{\bar{B}}}\right)^{1/\alpha}.$$

Nous constatons que l'emploi de long terme dépend des valeurs de long terme des deux marges ajoutées et de c, le taux de remplacement, qui affecte à long terme l'offre de travail puisqu'il affecte le coût d'opportunité de chaque travailleur. Nous avons aussi l'expression suivante pour l'output de long terme (c'est l'équation (40)) :

$$\bar{Y} = n^{\alpha}\bar{B}\bar{L}^{(1-\alpha)}.$$

On voit maintenant apparaître la valeur de long terme du progrès technique, qui est à l'origine de la croissance de toute économie. Substituant l'expression pour l'emploi de long terme dans la fonction de production agrégée de long terme, nous obtenons

$$\bar{Y} = n^{\alpha} \bar{B} \left(n \left(\frac{\bar{B}(1-\alpha)}{\bar{m}^w \bar{m}^p c \bar{B}} \right)^{1/\alpha} \right)^{(1-\alpha)} .$$

Simplifiant, nous obtenons

$$\bar{Y} = n\bar{B} \left(\frac{c}{(1-\alpha)} \right)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} (\bar{m}^w)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} (\bar{m}^p)^{\frac{-(1-\alpha)}{\alpha}} .$$

Nous obtenons ainsi un résultat qui est en accord avec l'intuition économique. Une variation du progrès technique entraîne à long terme une variation proportionnelle du produit. Étant donné que le progrès technique multiplie l'emploi de long terme dans la fonction de production agrégée de long terme, ceci n'est pas surprenant. Une augmentation d'une ou de l'autre des marges ajoutées fait baisser l'output à long terme. Ceci est aussi logique. Une hausse d'une des marges ajoutées fait en sorte que notre économie devient moins concurrentielle, ce qui fait dévier l'output encore plus par rapport à son niveau socialement optimal. Finalement, nous avons un terme additionnel qui ne paraît pas dans le choc d'offre s_t de la courbe OA de court terme : une augmentation de c fait baisser l'output à long terme par le biais de son impact sur l'offre de travail. Notez bien que dans cette expression pour la valeur de long terme de l'output le paramètre γ ne paraît pas. L'impact de changements permanents de $\bar{B}$, de $\bar{m}^p$, de $\bar{m}^w$ ou de c est complètement indépendant de la pente de la courbe d'offre agrégée de court terme.

En prenant des logs, nous avons tout de suite

$$\bar{y} = \ln(n) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \ln((1-\alpha))$$

$$+ \ln\left(\bar{B}\right) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \ln\left(\bar{m^p}\right) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \ln\left(\bar{m^w}\right) - \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \ln(c).$$

Nous pouvons utiliser cette expression pour analyser la taille du déplacement vers la droite de la courbe OA de long terme.

Il s'agit de savoir maintenant quel doit être le déplacement horizontal de la courbe DA. Je suis arrivé à la conclusion que la présentation du chapitre 17 est inadéquate pour répondre à cette question. La théorie de la croissance (que nous n'allons pas étudier, faute de temps) nous apprend que le taux d'intérêt réel devrait être égal à long terme à quelque chose qui dépend de l'impatience des individus mesurée par leur taux d'escompte subjectif (un paramètre dans la fonction d'utilité) et du taux de croissance de l'économie, qui dépend du taux de croissance à long terme du progrès technique B. Nous devrions avoir comme solution pour $\bar{r}$

$$\bar{r} = \frac{g}{\delta} - 1,$$

où

$$\bar{B}_t = g\bar{B}_{t-1}$$

et donc g représent le taux de croissance brut à long terme de l'économie, et δ est le taux d'escompte subjectif si la fonction d'utilité des individus prend la forme

$$U_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i f\left(C_{t+i}\right), \quad 0 < \delta < 1,$$

où $f\left(C_{t+i}\right)$, qui donne l'utilité de la consommation en $t+i$, est est une fonction concave de C_{t+i}, c'est à dire

$$\frac{\partial f}{\partial C_{t+i}} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {C_{t+i}}^2} < 0.$$

Ceux qui s'intéressent à la question pourront trouver un résultat semblable concernant le taux d'intérêt réel à long terme dans les chapitres du livre sur la croissance économique.

Nous pouvons aussi considérer le problème d'un ménage qui maximise son utilité en choisissant un sentier temporel pour ses dépenses de consommation. Sa fonction d'utilité est (faisant abstraction de l'incertitude)

$$U_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \ln\left(C_{t+i}\right), \quad 0 < \delta < 1,$$

qui est une spécialisation de la fonction d'utilité spécifiée un peu plus haut. Le ménage fait face chaque période à une contrainte budgétaire qui prend la forme

$$(Y_t - T_t) + (1 + r_t)B_t = C_t + B_{t+1}$$

où $Y_t - T_t$ est son revenu disponible, B_t est une obligation de court terme (maturité d'une période), et r_t est le taux d'intérêt réel. Le Lagrangien du problème du ménage est

$$\max_{C_{t+i},\lambda_{t+i}} \mathcal{L} \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \left\{ \ln\left(C_{t+i}\right) + \lambda_{t+i}\left(Y_{t+i} + (1+r_{t+i})B_{t+i} - C_{t+i} - B_{t+i+1}\right) \right\}.$$

La séquence de multiplicateurs de Lagrange fait partie des variables de choix du ménage comme dans tout problème d'optimisation sous contrainte. Les conditions du premier ordre du problème pour les variables choisies en t sont :

$$C_t \; ; \quad \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0,$$

$$B_{t+1} \; ; \quad -\lambda_t + \delta\lambda_{t+1}\left(1 + r_{t+1}\right) = 0,$$

$$\lambda_t \; ; \quad Y_t + (1+r_t)B_t - C_t - B_{t+1} = 0.$$

Substituant λ_t dans la deuxième condition donne

$$\frac{1}{C_t} = \delta \frac{1}{C_{t+1}}\left(1 + r_{t+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{C_{t+1}}{C_t}\frac{1}{\delta} - 1 = r_{t+1}.$$

À long terme, le taux de croissance brut de la consommation est constant et égal au taux de croissance de l'économie. Donc,

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t} | \text{long terme}\right) = g.$$

À long terme le taux d'intérêt réel est constant. Nous obtenons

$$\frac{g}{\delta} - 1 = \bar{r}.$$

Cette analyse nous dit que le taux d'intérêt réel pourrait dépendre du **taux de croissance** de l'économie, mais non du **niveau** de l'output à long terme. Si nous utilisons la courbe DA de court terme pour analyser l'impact d'un changement de $\bar{y}$ sur $\bar{r}$, nous faisons fausse route. L'équation (25) à la page 530 du manuel nous dit que l'impact d'un changement permanent de l'output sur le taux d'intérêt réel dépend du paramètre α_2, qui dépend des paramètres b et h dans la règle de Taylor. Ceci est absurde. La politique monétaire a un impact dans notre modèle seulement parce qu'il y a des rigidités de court terme et un ajustement lent des attentes. À long terme, la banque centrale ne peut pas contrôler le taux d'intérêt réel, et donc l'idée que le taux d'intérêt réel dépend de paramètres dans sa règle de comportement est absurde.

Il faudrait modifier notre analyse de la demande agrégée pour tenir compte de changements **permanents** de l'output sur la consommation. Autrement dit, pour ceux qui ont déjà vu cela dans un cours préalable de macroéconomie il faudrait avoir recours à une théorie du **revenu permanent** à la Friedman. Voir à ce sujet la discussion dans le chapitre 15 du livre.

En fait, si le revenu réel augmente de façon permanente à cause d'un changement permanent de $\bar{B}$, dans la mesure où le taux d'épargne des individus reste constant, les dépenses de consommation doivent augmenter de façon proportionnelle au revenu réel de long terme. On pourrait proposer une relation d'équilibre sur le marché des biens et services modifiée de la forme

$$C = C\left(\bar{Y} - \bar{T}\ ,\ Y - T\ ,\ r\ ,\ \epsilon\right),$$

une version modifiée de l'équation (3) dans le chapitre 16, avec

$$\frac{\partial C}{\partial\left(\bar{Y} - \bar{T}\right)}\frac{\left(\bar{Y} - \bar{T}\right)}{C} = 1.$$

À partir de cette modification, il faudrait en principe refaire l'analyse de la demande agrégée de long terme, un peu comme j'ai fait pour l'offre agrégée de long terme dans les paragraphes précédents. Mais on peut couper court avec le raisonnement suivant. La logique économique nous dit, sans analyser les conséquences algébriques de cette modification, qu'à long terme la courbe DA et la courbe OA de long terme peuvent et doivent se croiser au point où $\bar{\pi} = \pi^*$, sans entraîner forcément une modification de la règle de Taylor. Donc, nécessairement la courbe DA doit se déplacer autant (dans le sens horizontal) que la courbe OA de long terme. Ce déplacement a lieu sans l'intervention de la banque centrale, et sans modification de sa règle de Taylor. Il n'y a aucun changement à long terme du taux d'intérêt réel. Analyser l'impact d'un changement de $\bar{y}$ sur le taux d'intérêt réel $\bar{r}$ revient encore à faire fausse route. En fait nous savons qu'il n'y a pas d'impact dans la mesure où ni les préférences (captées par δ) ni le taux de croissance g ne changent.

Maintenant, étant donné le changement dans l'output de long terme, nous pouvons calculer le déplacement horizontal de la courbe OS de court terme. Réécrivons cette équation comme

$$\pi_t = \pi_t^e + \gamma (y_t - \bar{y}_t) + s_t.$$

On calcule la taille du déplacement **horizontal** de la courbe OA de court terme en gardant **constant** le taux d'inflation. Nous avons

$$\Delta\pi_t = 0 = \gamma (\Delta y_t - \Delta\bar{y}_t)$$

si $\Delta s_t = 0$

$$\Rightarrow \Delta y_t - \Delta\bar{y}_t.$$

Le déplacement horizontal de OA de court terme est égal au déplacement horizontal de OA de long terme.
Si l'économie commence à un équilibre de long terme (intersection simultanée de la courbe DA et des courbes OA de long terme et de court terme), un changement de $\bar{y}$ provoque un déplacement simultané vers la droite des trois courbes, et l'économie se retrouve tout de suite à un nouvel équiibre de long terme.

Annexe B : Dérivation de l'équation (42)

Dans cette section, je montre explicitement comment dériver l'équation (42) du texte.

À partir de la solution pour l'écart du produit, nous utilisons l'équation (39) afin de substituer $\widehat{y}_t$ et $\widehat{y}_{t-1}$. Nous obtenons

$$z_t - \alpha\widehat{\pi}_t = az_{t-1} - a\alpha\widehat{\pi}_{t-1} + \beta\left(z_t - z_{t-1}\right) - \alpha\beta s_t + \alpha\beta\phi s_{t-1}.$$

Cette équation ne dépend que de $\widehat{\pi}_t$, de son premier retard, et de chocs. Nous n'avons qu'à isoler $\widehat{\pi}_t$ et simplifier. Nous avons

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}_t &= a\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{1}{\alpha}z_t - \frac{a}{\alpha}z_{t-1} - \frac{\beta}{\alpha}z_t + \frac{\beta}{\alpha}z_{t-1} + \beta s_t - \beta\phi s_{t-1} \\
&= a\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{1-\beta}{\alpha}z_t - \frac{a-\beta}{\alpha}z_{t-1} + \beta s_t - \phi\beta s_{t-1} \\
&= a\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{\frac{1+\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} - \frac{1}{1+\alpha\gamma}}{\alpha}z_t - \frac{\frac{1+\alpha\gamma\phi}{1+\alpha\gamma} - \frac{1}{1+\alpha\gamma}}{\alpha}z_{t-1} + \beta s_t - \phi\beta s_{t-1} \\
&= a\widehat{\pi}_{t-1} + \frac{\frac{1+\alpha\gamma-1}{1+\alpha\gamma}}{\alpha}z_t - \frac{\frac{1+\alpha\gamma\phi-1}{1+\alpha\gamma}}{\alpha}z_{t-1} + \beta s_t - \phi\beta s_{t-1} \\
&= a\widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\frac{1}{1+\alpha\gamma}z_t - \gamma\phi\frac{1}{1+\alpha\gamma}z_{t-1} + \beta s_t - \phi\beta s_{t-1} \\
\Rightarrow \widehat{\pi}_t &= a\widehat{\pi}_{t-1} + \gamma\beta z_t - \gamma\beta\phi z_{t-1} + \beta s_t - \phi\beta s_{t-1},
\end{aligned}$$

ce qui est l'équation (42).

Dernière modification : **14/05/2012**